



TITLE:

振り子の運動と非可換球面(部分作用素環の構造)

AUTHOR(S):

松本, 健吾

CITATION:

松本, 健吾. 振り子の運動と非可換球面(部分作用素環の構造). 数理解析研究所講究録 1991, 751: 65-83

ISSUE DATE:

1991-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82053>

RIGHT:

振り子の運動と非可換球面

都立大 理 松本健吾 (Kengo Matsumoto)

§ 0. 序論

一般に、多様体 M に Lie 群 G が作用しているとき、その軌道空間 M/G は必ずしも多様体にならない。それどころか、ハウスドルフにもならないことがある。そんな場合には、従来の幾何の道具を M/G に直接もち込み、 M/G 上で幾何学を展開することは、最早、不可能と言、て良いだろう。しかし、軌道空間 M/G の代りに、 M 上の複素数値連続関数環 $C(M)$ と群 G による接合積と呼ばれる C^* 環 $C(M) \rtimes G$ を考え、その代数の上で微分幾何学、トポロジーを展開しようという考え方がある。これが、A. Connes の非可換微分幾何学の基本となる考え方の 1 つである。

さて、本稿で対象とする C^* 環は、次の関係式 (1) だけで決まる普遍 C^* 環である：

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z^*Z = Z Z^*, \quad W^*W = W W^* \\ Z^*Z + W^*W = 1 \\ ZW = e^{2\pi i \Theta(W^*W)} WZ. \end{array} \right.$$

但し、ここで Θ は、任意に与えられた閉区間 $[0, 1]$ から実数 \mathbb{R} への連続関数で、 $\Theta(W^*W)$ は作用素 W^*W の関数 Θ による functional calculus で得られた自己共役作用素を表す。

この関係式 (1) だけをもつ作用素 Z, W で生成された普遍 C^* 環を S_{Θ}^3 と書く。特に、関数 Θ が一定値 θ であれば、関係式 (1) は、次のように簡単になることに注意しよう。

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z^*Z = Z Z^*, \quad W^*W = W W^* \\ Z^*Z + W^*W = 1 \\ ZW = e^{2\pi i \theta} WZ. \end{array} \right.$$

さらに関数 Θ が恒等的に 0 であれば、 Z と W が可換になるので、 S_{Θ}^3 は可換 C^* 環になり、3次元球面上の連続関数環 $C(S^3)$ と同型になる。従って、 S_{Θ}^3 は関数 Θ による通常の球面 S^3 の非可換変形とも言える。そこで、この C^* 環 S_{Θ}^3 を非可換3次元球面と呼ぼう。

本稿の目的は、特に関数 Θ が一定値 $\theta (\neq 0)$ のとき、非可

換球面 S^3_{\oplus} が振動子を2つ組み合わせた質点系に付随する相空間上の力学系 (S^3, θ, R) から接合積 $(S^3) \times_0 \mathbb{R}$ が得られることを示すことである。

§1. 非可換球面 S^3_{\oplus} の具体的構成とその構造

この節では、前節で抽象的に与えられた非可換球面 C^* 環 S^3_{\oplus} に具体的方法で構成し、その C^* 環としての構造を述べる。

まず、通常の3次元球面 S^3 に、以下の様にトポロジカルな方法で眺めてみよう。最初、普通に \mathbb{R}^4 内に実現するとして：

$$S^3 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \}.$$

$x_1 + ix_2 = z$, $x_3 + ix_4 = w$ とおくことから、 S^3 は \mathbb{C}^2 上の単位球面としても実現される：

$$S^3 = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \}.$$

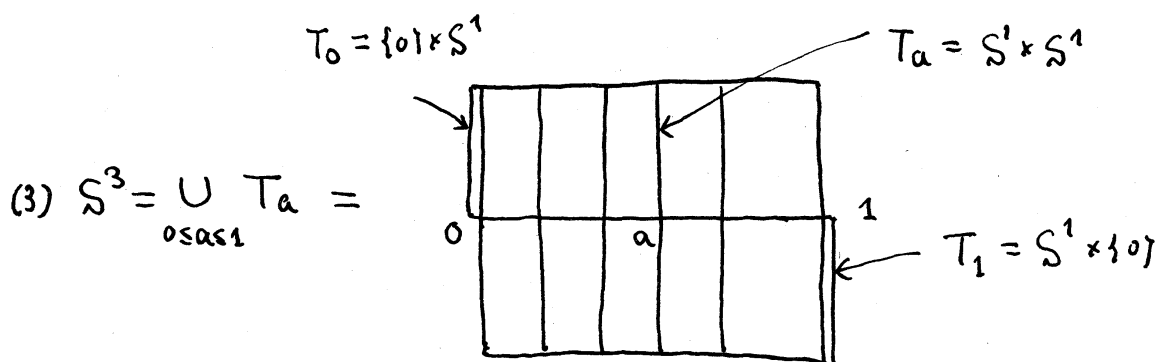
さて、閉区間 $[0, 1]$ 内の任意の実数 a に対して、 S^3 内の部分集合 T_a に

$$T_a = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = a, x_3^2 + x_4^2 = 1-a \}$$

で定義する。 $a \neq 0, 1$ のとき, これは 2次元トーラスと同相となる。 つまり

$$T_a \cong \begin{cases} \{0\} \times S^1 \cong S^1 & (a=0) \\ S^1 \times S^1 & (0 < a < 1) \\ S^1 \times \{0\} \cong S^1 & (a=1) \end{cases}$$

今, $S^3 = \bigcup_{0 \leq a \leq 1} T_a$ (disjoint union) だから, S^3 は $[0, 1]$ 上の T_a をファイバーとしたバンドルと考えられる。



このバンドル $\bigcup_{0 \leq a \leq 1} T_a$ を $a = \frac{1}{2}$ で左右に分割する。

$$D_L = \bigcup_{0 \leq a \leq \frac{1}{2}} T_a,$$

$$D_R = \bigcup_{\frac{1}{2} \leq a \leq 1} T_a$$

この時, 簡単に分る様に, D_L, D_R は共にソリッド・トーラスに同相である。 つまり,

$$D_L = D^2 \times S^1, \quad D_R = S^1 \times D^2$$

但し $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. 従って, S^3 は次のように
2つのソリッドトーラスの和に分解される。

$$S^3 = D_L \cup D_R = (D^2 \times S^1) \bigcup_{\partial(D^2 \times S^1) = \partial(S^1 \times D^2)} (S^1 \times D^2)$$

$D^2 \times S^1$ と $S^1 \times D^2$ に置き換えることから, S^3 は, ソリッド
トーラス $D^2 \times S^1$ の2つのコピーとその境界 $\partial(D^2 \times S^1)$ で
同相写像 $\rho: (\xi, \zeta) \in S^1 \times S^1 \rightarrow (\zeta, \xi) \in S^1 \times S^1$ を通して,
はし合わせたものになる, という。

$$(4) \quad S^3 = (D^2 \times S^1) \bigcup_P (D^2 \times S^1)$$

さて, この分解を利用して, S^3 を非可換代数に変形しよ
う。変形の方角を指定するパラメータの空間 \mathcal{P} を次で定
義する。

$$\mathcal{P} = \{ \Theta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ 連続関数全体} \}$$

以下, 関数 $\Theta \in \mathcal{P}$ を1, 任意にとり, 固定する。 Θ に付
随した関数 $\Theta_L, \Theta_R \in \mathbb{R}$ と Θ の $\frac{1}{2}$ での値を, それぞれ

$$\Theta_L(r) = \Theta\left(\frac{r}{2}\right), \quad \Theta_R(r) = \Theta\left(1 - \frac{r}{2}\right), \quad r \in [0, 1]$$

$\theta = \Theta(\frac{1}{2}) (= \Theta_L(1) = \Theta_R(1))$ とおく。

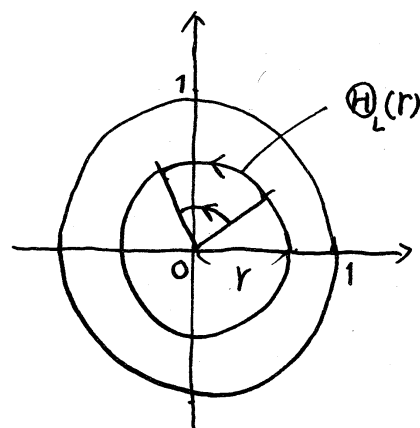
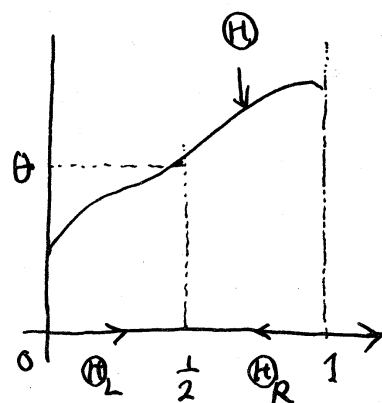
まず, S^3 と非可換変形する前に,
 $D^2 \times S^1$ の非可換変形を考える。関
 数 Θ_L に対し, D^2 上の同相写像
 α_{Θ_L} を

$$\alpha_{\Theta_L}(re^{2\pi i\zeta}) = re^{2\pi i(\Theta_L(r) + \zeta)}$$

$$0 \leq r, \zeta \leq 1$$

で定義する。つまり, 原点を中心
 にした半径 r の円周上では角度 $\Theta_L(r)$
 だけ回転する力学系である。この

同相写像を自然に連続関数環 $C(D^2)$ に持ち上げると, 接合積
 $C(D^2) \rtimes_{\alpha_{\Theta_L}} \mathbb{Z} = D_{\Theta_L}$ をとり, これを, ソリッドトーラスの非
 可換版と考えよう。同様に, もう1つのソリッドトーラス
 の非可換版を, 関数 Θ_R に付随した接合積 $C(D^2) \rtimes_{\alpha_{\Theta_R}} \mathbb{Z} =$
 D_{Θ_R} として考えよう。円板 D^2 とその境界 $\partial D^2 = S^1$ に制
 限する写像を関数環 $C(D^2), C(S^1)$ に持ち上げると, D^2
 上の Θ_L -回転作用と S^1 上の $\theta (= \Theta_L(1))$ -回転作用は両立す
 るので, 自然に接合積環の上への準同型写像 π_θ を引き起こ
 す。



$$\pi_\theta : C(D^2) \rtimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = D_{\mathbb{Z}} \longrightarrow C(S^1) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z} = A_\theta$$

同様に, 準同型 π_θ

$$\pi_\theta : C(D^2) \rtimes_{-\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = D_{-\mathbb{Z}} \longrightarrow C(S^1) \rtimes_{-\theta} \mathbb{Z} = A_{-\theta}$$

が定義される。

ここで, 非可換トーラス $A_\theta, A_{-\theta}$ の次の関係式を満たすユニタリー生成元をそれぞれ U, V, \hat{U}, \hat{V} としよう:

$$VU = e^{2\pi i \theta} UV, \quad \hat{V}\hat{U} = e^{-2\pi i \theta} \hat{U}\hat{V}$$

このとき, 次の生成元間の対応 P_θ が A_θ から $A_{-\theta}$ への同型写像を与える。

$$P_\theta(U) = \hat{V}, \quad P_\theta(V) = \hat{U}.$$

通常の S^3 の分割 (4) を頭に入れて, 非可換 3 次元球面 S_θ^3 を次の様に定義しよう。

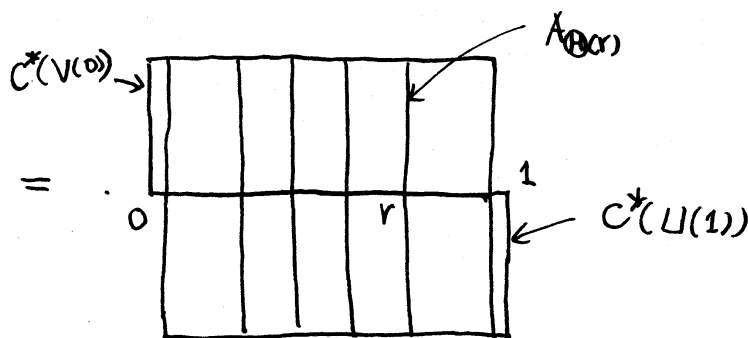
定義 (非可換 3 次元球面) 各関数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対し,

$$S_\theta^3 = \{(a, b) \in D_{\mathbb{Z}} \oplus D_{-\mathbb{Z}} \mid P_\theta \circ \pi_\theta(a) = \pi_{-\theta}(b)\}$$

分解 (4) により, 関数 θ が恒等的に 0 の場合は, $S_0^3 = C(S^3)$ と通常の S^3 上の連続関数環が復活するのは明らかだろう。

さて, S^3 のトーラスバンドルとしての分解 (3) に対応して, 次の様な区間 $[0, 1]$ 上のバンドル E_θ を考えよう。

$$(5) \quad \mathcal{E}_{\oplus} = \begin{cases} C^*(V(0)) & r=0 \\ A_{\oplus(r)} & 0 < r < 1 \\ C^*(U(1)) & r=1 \end{cases}$$



但し、非可換トーラス $A_{\oplus(r)}$ のユニタリー生成元 $U(r), V(r)$ を関係式

$$V(r)U(r) = e^{2\pi i \theta(r)} U(r)V(r), \quad r \in [0, 1]$$

を満たすものとして取り、上の $C^*(V(0)), C^*(U(1))$ はそれぞれ、 $V(0), U(1)$ から生成された $A_{\oplus(0)}, A_{\oplus(1)}$ の C^* 部分環である。このとき、次の事が分る。

命題 1. 非可換球面 S^3_{\oplus} は $[0, 1]$ 区間上の非可換トーラスバンドル \mathcal{E}_{\oplus} の連続クロスセクションの成す C^* 環として実現できる。

この命題は、 S^3 のトーラスバンドル (3) による分解の非可

換アナロジーである。

さて, $S_{\text{⑩}}^3$ は §0 で述べた関係式 (1) を満たす生成元による普通シフト環として実現するため, バンドル (5) の中で, 次のようなクリスセクション Z, W を選ぼう。

$$Z(r) = \sqrt{1-r} V(r), \quad W(r) = \sqrt{r} U(r), \quad r \in [0, 1]$$

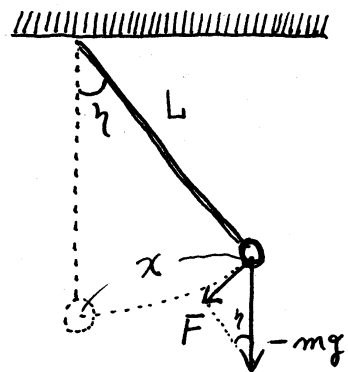
この二つのセクションが関係式 (1) を満たすことは, 明らかだろう。そして, 次の定理が示される。

定理 2. $S_{\text{⑩}}^3$ は関係式 (1) で決まる普通シフト環である。

§2. 単振り子に付随した力学系

この節では, 振り子を例にして, 単振動を表す質点系の相空間と, その上に付随して出来る力学系を説明しよう。高等学校の物理を越えていないので, 改めて, 書く必要もないのだが, 3次元球面上の力学系と関連させる都合上, きちんと書いておくことにする。

右図のような, 長さ L の棒 (ひも) がつるされた重さ m のおもりの振り子を考えよう。但し, 棒 (ひも) の重さは 0 とし, 振り角 θ は充分小とする。従って, おもりに働く重力 $-mg$ (g は重力加速度) が鉛直下向きに依



用する。Fをおもりの働く力の弧に沿った成分とすると、

$$F = -mg \sin \theta.$$

x を固定点Oからおもりの中心までの距離(弧の長さ)とすると、今角度 θ が充分小さいので、 $\sin \theta \approx \frac{x}{L}$ と近似できる。従って、 $k = \frac{mg}{L}$ (定数) とおくと、

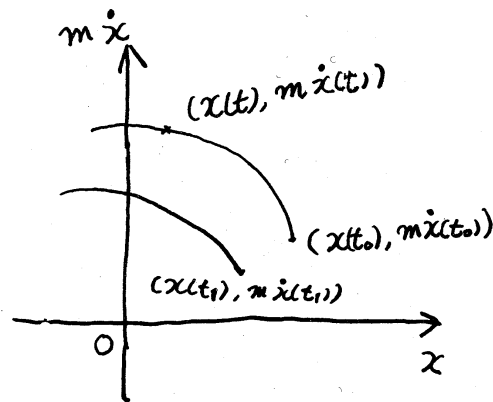
$$F = -kx$$

が得られる。このように、質点に働く力が、固定点からの距離に比例してこの系を“単振動”というのである。今、 x はもちろん、時間の関数であるが、これは次のNewtonの運動方程式を満たしている

$$(6) \quad m\ddot{x} = -kx \quad (\text{Newtonの運動方程式})$$

つまり、ある時刻 t_0 における位置と速度(運動量)の初期条件 $(x(t_0), m\dot{x}(t_0))$ が与えられれば、任意の時刻 t における位置と運動量 $(x(t), m\dot{x}(t))$ が微分方程式(6)を解くことにより、求まるわけだ。言い換えると、振り子の運動は、右の $(x, m\dot{x})$ -平面に、初期値 $(x(t_0), m\dot{x}(t_0))$ を指定したときの方程式(6)の解曲線として記述されることになる。そこで、実際にこの解曲線を求めてみよう。その為には

まず、関数 $\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x})^2$ を



時間 t で微分してやる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} k x^2 \right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m (\dot{x})^2 \right) \frac{d\dot{x}}{dt} \\
 &= kx \cdot \dot{x} + m \dot{x} \ddot{x} \\
 &= (kx + m \ddot{x}) \dot{x} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

従って, $\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x})^2$ は時間 t に依らない定数であることがわかる。この値を E とおこう。

$$(7) \quad \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 = E \quad (\text{定数}).$$

$\frac{1}{2} k x^2$ が系の位置エネルギーを表し, $\frac{1}{2} m (\dot{x})^2$ が運動エネルギーだから, その和が一定, つまり, (7) は力学的エネルギー保存則を示している。従って, 微分方程式 (6) の解曲線は (7) により, $(x, m\dot{x})$ -平面上で楕円を描くことがわかる。

楕円だと少し見にくいので, 次のように座標変換

$$x_1 = \sqrt{\frac{k}{2E}} x = \sin \varphi \quad (a), \quad x_2 = \sqrt{\frac{m}{2E}} \dot{x} = \cos \varphi \quad (b)$$

とすると, (7) は,

$$(7') \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$$

となるので, 結局, 微分方程式 (6) の解曲線は, (x_1, x_2) -平面上で単位円周を描くことになる。そこで, (a) を t で微分すると

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} \dot{x} = (\cos \varphi) \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \dot{x} \dot{\varphi}$$

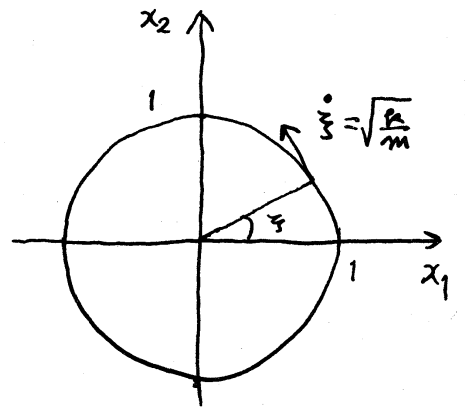
より,

$$(8) \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{定数})$$

($\dot{x}=0$ のところは, (b) を t で微分すればよい) がわかる。つまり,

この質点系は単位円周上で等

速円運動をすることがわかった。結局, 振りの運動は, 相空間が, 単位円周で, その上の速度 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ の等速円運動として捉えることができる。



さて, ここで作用素環に戻ってみよう。単位円周上の速度 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ の等速円運動は,

$$\alpha_t^{\sqrt{\frac{k}{m}}} (e^{i\varphi}) = e^{i(\varphi + \sqrt{\frac{k}{m}}t)} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

と表わされる。これを自然な連続関数環 $C(S^1)$ の上に上げて C^* 力学系

$$(C(S^1), \alpha^{\sqrt{\frac{k}{m}}}, \mathbb{R})$$

が出来る。この力学系の多くの性質は, それに付随してできる接合積 $C(S^1) \rtimes_{\alpha^{\sqrt{\frac{k}{m}}}} \mathbb{R}$ の代数的構造に反映する。しかし, 今の場合は,

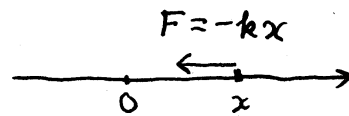
$$(9) \quad C(S^1) \rtimes_{\alpha^{\sqrt{\frac{k}{m}}}} \mathbb{R} \cong C(S^1) \otimes K$$

但し K は無限次元ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体の作る C^* 環, となり, C^* 環としては, トリビアルな物と

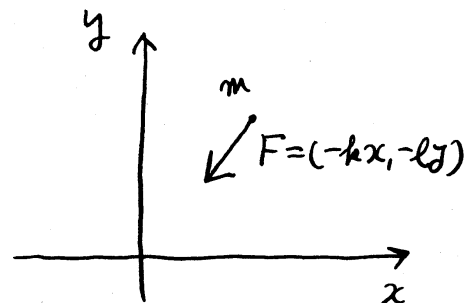
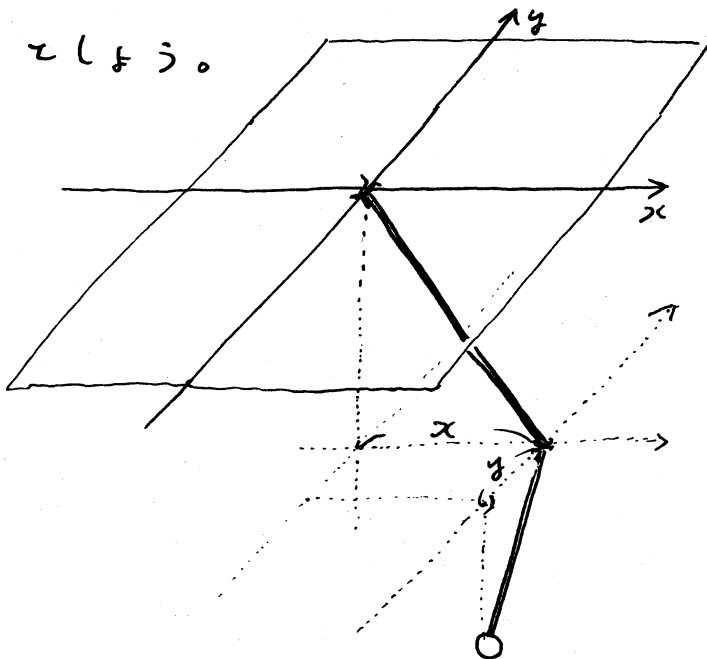
なり、あまりおもしろくない。そこで、節を変えて、振り子とスプリングを組み合わせてみる、1次元の力学系を考えてみる。

§3. 単振動の組み合せと非可換環面

前節での単位円周上の等速円運動は、直線上に質量 m の質点が、固定点 O からの距離 x に比例した力 F を受けるときの運動を記述するものであり、 $F = -kx$ 。

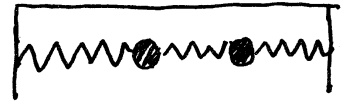


この節では、これを2次元平面に拡張して考えよう。今、正の数 $k, l > 0$ を固定する。平面上にある質量 m の質点を考えてみる。この質点は位置 (x, y) にあるとき、それぞれの座標軸からの距離に比例した力 $F = (-kx, -ly)$ を受けているとしよう。



2本の(重さのない)棒をちょうつがいにつなぎ、各棒が直角に運動するようにして、その先に重さ m のおもりをつけた質点系が、このような例になっている。

また右図のような2つの質点をもつバネ



の組を合わせから $F = (-kx, -ly)$ となる

質点系ができる(日大、読者の小沢先生から教えて頂いた)。さて、平面上のこのような質点の動きを記述する為に、前節と同様を考察をしてみよう。まず、Newtonの運動方程式は、各成分毎に、

$$(10) \quad -kx = m\ddot{x}, \quad -ly = m\ddot{y}$$

となる。この系の

$$\text{位置エネルギー } U \text{ は } U = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\text{運動エネルギー } K \text{ は } K = \frac{1}{2} (m(\dot{x})^2 + m(\dot{y})^2)$$

だから、力学的エネルギー保存則 $U + K = E$ (定数) により、

$$(11) \quad \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2} ly^2 + \frac{1}{2} m(\dot{y})^2 = E.$$

そこで、 $(x, m\dot{x}, y, m\dot{y})$ を座標にとった \mathbb{R}^4 内で考えると、微分方程式(10)の解曲線の集合は、3次元球面 S^3 に同相になることがわかる。実際、次のような座標変換を行うと、

$$(12) \quad x_1 = \sqrt{\frac{k}{2E}} x, \quad x_2 = \sqrt{\frac{m}{2E}} \dot{x}, \quad x_3 = \sqrt{\frac{k}{2E}} y, \quad x_4 = \sqrt{\frac{m}{2E}} \dot{y}.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

を得る。そこで、以下、微分方程式(10)の解曲線が S^3 内でのようになら、 α いるが正確に調べられる。 $\{0\}$ と同様、 $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して

$$T_\alpha = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = \alpha, x_3^2 + x_4^2 = 1 - \alpha\}$$

とおこう。 $b = 1 - \alpha$ とすると、(12)の座標変換により、

$$a = \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 \right\}, \quad b = \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} m (\dot{y})^2 \right\}$$

だから、前節の議論により、 $\dot{a} = 0$, $\dot{b} = 0$ 。つまり、 a , $b (= 1 - a)$ は時間 t に依らず、一定である。これは、微分方程式(10)の解曲線がトーラス T_α を保存していることを意味する。

そこで、次のように、パラメータ ξ, η をおこう。

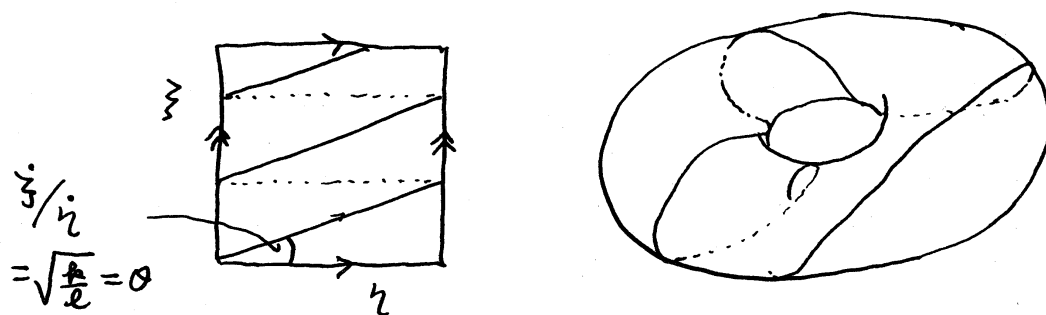
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{a} \sin \xi \\ x_2 = \sqrt{a} \cos \xi \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \sqrt{b} \sinh \eta \\ x_4 = \sqrt{b} \cosh \eta \end{cases}$$

前節の議論により、 ξ, η の速度はそれぞれ

$$\dot{\xi} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \dot{\eta} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となり、時刻 t に依存することなく一定である。解曲線をトーラス T_α 内の軌道と考えたとき、問題となるのは、2方

向の速度の比 $\dot{\xi}:\dot{\eta}$ が問題となる。従って $T\alpha$ 内を走る軌道は、次の図の様なクロネッカー型の流れとなる。

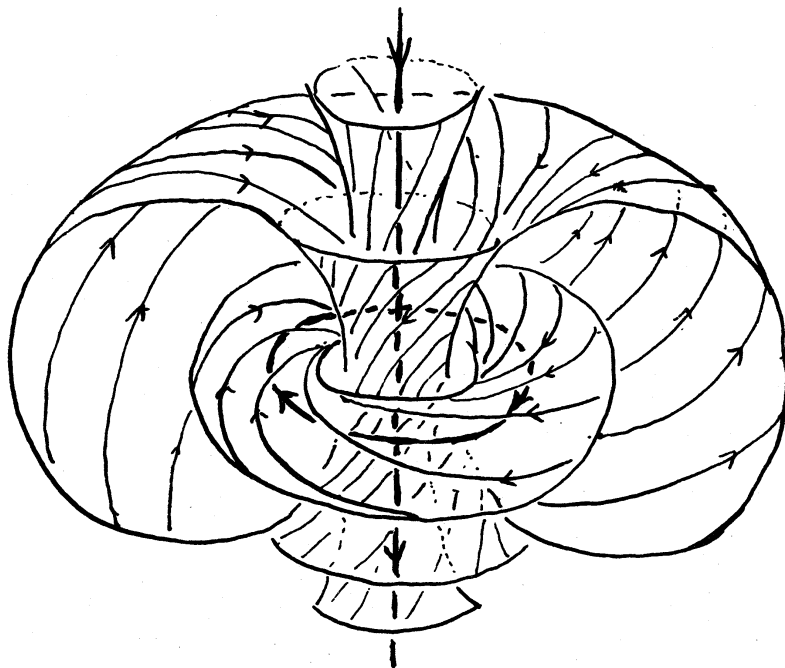


ここで $\theta = \sqrt{\frac{k}{2}}$ とおこう。以上をまとめると、微分方程式(10)の解曲線として、3次元球面 S^3 上に次のような力学系を得たことになる。

$$S^3 = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \}$$

上r.

$$\alpha_t^\theta(z) = e^{it\theta} z, \quad \alpha_t^\theta(w) = e^{it\theta} w, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Penrose の
本 P_{62} の絵

この S^3 上の力学系 (S^3, α^θ, R) を自然に関数環 $C(S^3)$ 上に持ち上げ、力学系 $(C(S^3), \alpha^\theta, R)$ を考えよう。このとき、§0, §1 の非可換球面の話と関連させて、次の定理を証明することが出来る。

定理3. $\theta = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \neq 0$ のとき、

$$C(S^3) \rtimes_{\alpha^\theta} R \cong S_\theta^3 \otimes K.$$

ここで K は無限次元ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体の作る C^* 環である。

定理の証明には、非可換トーラスにおける事実

$$C(S^1 \times S^1) \rtimes_{\alpha^\theta} R \cong A_\theta \otimes K$$

を本質的に使うが、 $S^3 \in \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} T_\alpha$ と分解したとき、両端点におけるファイバー $T_0, T_1 = S^1$ 上の同型が両立するようになり、うまく上の同型を伸ばせばなるまいので、やや注意を要する。

§4. 付け加え.

1), 前節の定理3をもう少し一般的な状況で考えよう。任意の関数 $\Theta \in \mathcal{F}$ ($\Theta(t) \neq 0, \forall t \in [0, 1]$) に対し、 S^3 上の前節より一般

化された力学系 $(S^3, \alpha^{\oplus}, R)$ を次で定義する。

$$\alpha_t^{\oplus}(z) = e^{it} z, \quad \alpha_t^{\oplus}(w) = e^{it \oplus (|w|^2)} w, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$z, w \in \mathbb{C}^2, \quad |z|^2 + |w|^2 = 1$$

これを自然に連続関数環 $CC(S^3)$ に持ち上げ、接合積を考えれば、次の同様の同型が示せる。

$$CC(S^3) \rtimes_{\alpha^{\oplus}} R \cong S_{\oplus}^3 \otimes K.$$

2). §3 において、最初、2次元平面から出発したが、3次元空間内での同様の質点の力学系を考えたときには、相空間が5次元球面 S^5 になる。従って、 S^5 上の流れが得られ、非可換5次元球面に対して、同様の結果を得る。

3). 以下のことは、今までの議論と関係のないことだが、つけ加えておこう。§1の非可換球面の構成において、円板 D^2 上の連続関数環 $CC(D^2)$ の代わりに、 shift^u が生成される Toeplitz 環 $C^*(u)$ を考えても全く同様の構成ができる。この場合は Toeplitz 型の非可換3次元球面 $\mathcal{I}S_{\theta}^3$ が出る。この環には自然に S^1 が作用して、その不動点環 $(\mathcal{I}S_{\theta}^3)^{S^1}$ を考えると、次の完全列を満たすことがわかる。

$$0 \rightarrow K \oplus K \rightarrow (\mathcal{I}S_{\theta}^3)^{S^1} \rightarrow CC(S^1) \rightarrow 0$$

つまり, 不動点環 $(\mathcal{K}S_0^3)^{S^1}$ は Podleś の量子球面である。

参考文献

1. K. Matsumoto, Non-Commutative Three Dimensional Spheres, to appear in Tokyo Journal of Mathematics.
2. _____, Non-Commutative Three Dimensional Spheres II, - Non-Commutative Hopf Fibring -, to appear in the Yokohama Mathematical Journal.
3. _____, Smooth Structures, Actions of the Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ and Haar measure on Non-Commutative Three Dimensional Spheres, preprint.
4. _____, Non-Commutative 3-Spheres, to appear in the Proceedings of the international conference on "Current Topics in Operator Algebras" Nara, 1990.
5. _____ and J. Tomiyama, Non-Commutative Lens Spaces, to appear in J. Math. Sci. Japan.
6. R. Penrose, Spinors and Space-Time. vol 2, Cambridge Univ. Press.
7. P. Podleś, Quantum Spheres, Lett. Math. Phys. 14(1987), 193-202.